5

D. D.

Dissertatio Physico-Mathematica

De

INFLEXIONIBUS LAMINARUM ELASTICARUM,

Cujus

PARTICULAM I.

Cons. Ampl. Fac. Philos. Aboëns.

Publico Examini submittunt

AUCTOR

JOHANNES HENR. LINDQVIST,

Math. Docens,

Et

RESPONDENS

ISAACUS HOECKERT,

Stipend. Reg. Borea-Finl.

Die 25 Junii 1777.

L. H. Q. A. M. S.

ABOÆ

Impressit JOHANNES CHRISTOPH. FRENCKELL,

Reg. Acad. Typogr.

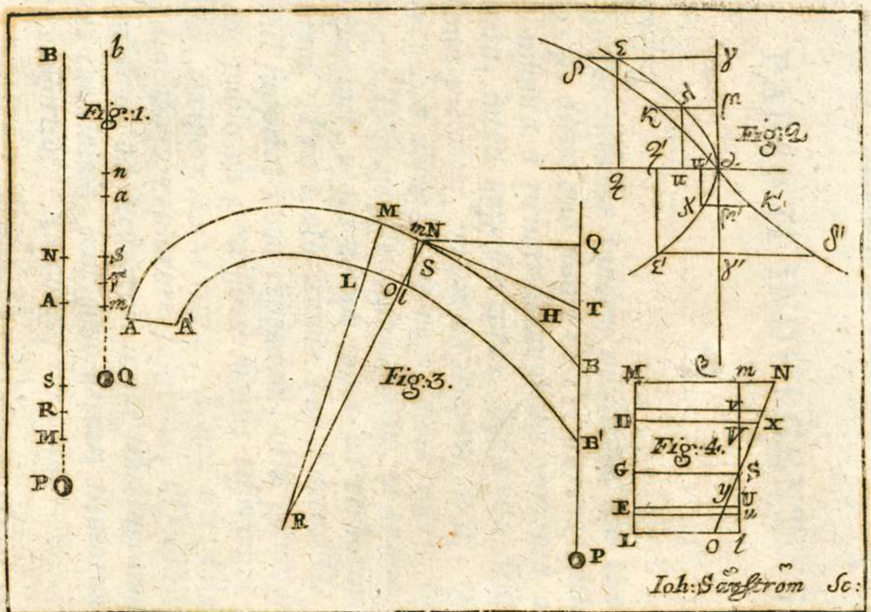
Fig:1.
Fig:2.
Fig:3.
Fig:4.

VIRO Perquam Reverendo atque Clarissimo,

D:no JOHANNI HOECKERT,

Sacellano in Nousis meritissimo.

PARENTI INDULGENTISSIMO.

Exoptatissimam tandem anxiisque diu expetitam votis illuxisse diem, qua meam in Te, Parens Optime, summam ob infinita a primis incunabulis percepta amoris documenta, intra angusta cordis sepimenta delitescentem hactenus pietatem, palam expromere liceat, exsultans gaudeo. Sed obstupescens mox fateri cogor, tantam beneficiorum Tuorum esse multitudinem, ut eadem ingenii vires sufflaminet, utque eorum copia ad verborum redigar inopiam. Pro tanto itaque Tuo Parens O. favore, cum nihil suppetat quod rependam, velis voluntatem pro actu, hanc publicam gratissimæ mentis tesseram remunerationis loco, excipere, enixe rogo. Meum erit, Summum Numen ardentissimis implorare suspiriis, dignetur Te, Genitor Carissime, ad Nestoream usque senectam omnigena felicitate cumulatum, suavissimo demum Beatorum transscribere consortio! Ita vovet, ita optat

PARENTIS INDULGENTISSIMI

Filius obedientissimus

ISAACUS HOECKERT.

§. I.

Ut in genere maxime ſe commendat Doctrina Elaſticitatis uſu illo multifario, quem nobis præſtant corpora inſigni hac proprietate prædita; ita hoc in ſpecie dicendum erit de laminis Elaſticis, quarum in Machinis Mechanicis quam plurimis maximum eſt momentum, quarumque ideo minime negligenda Theoria. Cujus quæ utilitatem loquuntur ſexcenta alia ut reticeamus exempla, nominaſſe ſolum ſufficiat Horologia Automata portatilia, quibus tam ad motum excitandum, quam ad eundem moderandum, laminæ hujusmodi commodiſſime applicantur. Accuratam igitur temporis menſuram horum ope unquam obtineri fruſtra ſperatur, niſi rite cognoſcantur proprietates atque figura laminæ Elaſticæ inflexæ, & inprimis qualis hinc pro data quavis inflexione fiat ejus vis tenſionis. Figuræ hujus, quæ *Curva Elaſtica* communiter dicitur, nullam factam invenimus mentionem ante tempora GALILÆI, qui illam eſſe parabolam primus ſuſpicatus eſt. Tamdiu etiam intactam manſiſſe, recentiorique demum ævo elaborari inceptam utiliſſimam hanc doctrinam, nemo mirabitur, qui cogitaverit, iis Veteres deſtitutos fuiſſe adminiculis, ſine quibus ne latum quidem, ut ajunt, unguem in illo progredi licet. Quod enim in reliqua *Scientia Naturali* frequenter accidit, id etiam in hoc Capite inprimis locum obtinet, ut experimentis singulari artificio atque accuratione institutis adjungere oporteat sublimiorem Geometriam atque subtilissimam illam recentius inventam Analysin Infinitorum. Hypothesis cujus meminimus GALILÆI de figura Curvæ Elasticæ per totum fere sæculum post eum invaluit. Errorem vero hunc tandem discussit Cel. Basileensium Mathematicus JAC. BERNOULLI, qui inflexiones Elateris ad calculum revocare primus aggressus est. Anno 1691 ex occasione Problematis Funicularii in naturam Curvæ Elasticæ inquirere cœpit, illamque mox pro Casu saltim specialissimo detexit. Suppressa vero sua Analysi, in *Actis Eruditorum Lipsiensibus ejusdem Anni* Problema hoc de invenienda Curvatura Laminæ Elasticæ solvendum Eruditis proposuit. Triennio post quum nemo ad postulatum Ejus respondisset, in *Act. Lips. 1694* constructionem Curvæ Elasticæ ipse dedit, eatenus quidem generaliorem, quatenus ad assumtam quamcunque Legem Tensionis applicari possit, non tamen ideo absolutam, quippe cum ad tensiones solum fibrarum extremarum in superficie Laminæ convexa attendat, nullo habito respectu compressionis in parte concava. Hoc cum ei objiceretur, idem rursus Problema tractandum suscepit in *Act. Lips. 1695*, ita tamen ut extremas tantum fibras in superficie convexa extendi & in concava comprimi supponeret, intermediarum vero omnium um nullam rationem haberet. Tandem ut hoc quoque vitium tolleret, in *Actis Acad. Scient. Parif. pro Anno 1705* idem argumentum denuo perfecutus eft ita ut omnes fibras per totam Laminæ craffitiem calculo fubjicere conaretur. Quum vero principium illud, cui inprimis poftremam hanc fuam folutionem fuperftruxit, non fatis rigide demonftratum, immo falfum effe deprehenderetur (cfr. *Jac. Bernoulli Opp. Tom. II. p. 983. 984 in notis*), materia hinc fatis ampla in rem hanc inquirendi aliis poft eum Mathematicis relicta eft, quorum omnium conamina Problema hoc folvendi recenfere perlongum foret. Quicquid fit, nondum perfecte folutum idem cenferi poteft, nam (ut verbis utar Ill. EULERI in *Nov. Comment. Acad. Petrop. Tom. XV. pro Anno 1770. p. 381.*) *quæ adhuc de figura Corporum flexibilium & elafticorum a Geometris in medium funt allata, non latius quam ad fila fimplicia funt extendenda, ---- quare longiffime adhuc fumus remoti a Theoria completa, cujus ope non folum fuperficierum, fed etiam corporum flexibilium figura definiri queat; atque hæc Theoria etiamnunc tantopere abfcondita videtur, ut ne prima quidem ejus principia adhuc fint evoluta.* Hinc etiam fore fperamus, ut nobis facile ignofcatur, quod de Inflexionibus Laminarum ejusmodi Elafticarum tentamina noftra, licet minus perfecta nec omni numero abfoluta, publicæ luci committere audeamus. Quid vero hac in re præftiterimus, B. Lector ipfe judicet.

§. 2.

Elaftica dicuntur Corpora, quæ, fi figura eorum vi aliqua comprimente, extendente aut flectente mutetur, cessante ista vi, sponte ad figuram pristinam tendunt. *Elasticitas* igitur est illa corporum proprietas, qua post factam ejusmodi mutationem, priorem suam formam recuperare nituntur. *Perfecta* hæc censetur, si corpora se restituant eadem vi, qua mutata fuit figura: *Imperfecta* vero, si minori. Unde sequitur *Gradus Elasticitatis* rite æstimandos esse ex ratione illa inter vim restitutionis & vim mutantem. Ad hanc vero vim restitutricem quam maxime attendendum judicamus, cum imperfecta sit omnis Elasticitas, quam in corporibus hucusque deprehendere licuit.

§. 3.

Axioma I. Si fibra elastica homogenea secundum longitudinem utcunque extendatur vel comprimatur, singularum ejus partium æqualium æqualis erit tensio vel compressio.

Axioma II. Si fibræ similes & æquales, ejusdemque elasticitatis, æqualiter extensæ vel compressæ sint, vires quibus se restituere conantur etiam æquales erunt.

§. 4.

Lemma. *Si fibræ homogeneæ AB, ab (Fig. 1.) ejusdem elasticitatis & crassitiei, fixæ in B, b extendantur ad M, m (vel comprimantur ad N, n) ita ut $AM : am$ (vel $AN : an$) sint in ratione longitudinum $AB : ab$; Vires, quibus se restituere conantur hæ fibræ, erunt æquales.*

Demonstr. Utraque fibra extensa si dividatur in elementa æqualia $MR = RS$ &c. $= mr = rs$ &c.

patet

patet (*hyp.* & §. 3.) quodlibet horum æqualiter tendi. Ponantur jam puncta *R*, *r* tantisper fixa, punctis vero *M*, *m* applicatas Potentias *P*, *Q*, quæ in statu illo extensionis retinere valent elementa *MR*, *mr*, quæque ideo æquipollent viribus, quibus eadem elementa se contrahere conantur. Ob æqualitatem igitur & homogeneitatem, nec non eandem (*dem.*) tensionem horum Elementorum, erit $P = Q$ (§. 3. *Ax. II.*). Eadem vero vi, qua *P* agit in *M*, aget etiam in *R*, adeoque si loco ipsius *R* iterum concipiatur punctum *S* fixum, ob æquales tensiones ipsorum *MR* & *RS* (§. 3. *Ax. I.*), ad totum *MS* in eodem tensionis statu retinendum eadem Potentia *P* præcise sufficiet. Hoc quum de ceteris omnibus elementis utriusque *BM* & *bm* æqualiter valet, sequitur ob $P = Q$ (*dem.*) utramque fibram eadem vi semet contrahere conari.

Pari modo probatur æqualitas virium, quibus fibræ istæ compressæ se restituere nituntur.

§. 5.

Quam rationem in genere sequantur extensiones vel compressiones ejusdem fibræ diversis potentiis tensæ vel compressæ, inter desiderata in Scientia Naturali adhuc referendum judicamus. Vulgatissima quidem est hypothesis, illas viribus hisce proportionales esse. Experimentis etiam evictum est, hanc rationum æqualitatem saltem obtinere, si extensiones illæ admodum sint exiguæ. Hypothesin vero hanc universaliter sumtam, non dubiam modo, sed & minus veram, plures evincunt rationes (vid. sis *Jac. Bernoulli* *li Opp. Tom. II. p. 981.).* Ut igitur problematis nobis propositi generalem exhibeamus solutionem, missa hac hypothesi, supponimus fibram simplicem datæ longitudinis $\alpha\beta = f$ (Fig. 2.) fixam in β extensamque ad μ, conari se contrahere potentia aliqua $= p'$; & ex puncto μ erigi ad $\alpha\mu$ normalem $\mu\kappa$, quæ sit ad f, ut p' ad datam aliquam potentiam k. Si hac ratione pro quavis fibræ $\alpha\beta = f$ extensione $\alpha\mu = t$, potentiæ p' proportionalis fiat $\mu\kappa = p$, obtinetur linea $\alpha\kappa\delta$, quæ scilicet est locus omnium punctorum κ, quamque ideo *Lineam Tensionum* nominamus. Pari modo si eadem fibra $\alpha\beta$ (manente β) comprimatur ad μ' & ita compressa se relaxare nitatur vi $= q'$, atque ipsi $\alpha\mu' = v$ normalis fiat $\mu'\kappa' = q$, quæ sit ad $f :: q' : k$, oritur *Linea Compressionum*, locus scilicet omnium punctorum κ'. Verosimillimum quidem videtur, Lineam Compressionum esse continuationem Lineæ Tensionum versus partem oppositam, quum compressio nihil aliud sit quam negativa tensio, sicut p' & q' non sunt nisi vires restituentes, quæ in directione contraria agunt. Interim tamen ne tali admissa hypothesi, de universalitate problematis solvendi aliquid decedat, generatim Lineas $\alpha\kappa\delta$ & $\alpha\kappa'\delta'$ utcunque differentes supponimus. Ulterius si ad rectam $\alpha\beta = f$, areæ $\kappa\mu\alpha$ ($= \int p\,dt$) æquale applicetur rectangulum, quod sit $= ft'$, & areæ $\alpha\mu'\kappa'$ ($= \int q\,dv$) æquale rectangulum $= fv'$, eriganturque ex punctis μ & μ' ipsi $\mu\mu'$ perpendiculares $\mu\lambda = t'$ & $\mu'\lambda' = v'$, puncta λ & λ' alias dabunt curvas $\alpha\lambda\varepsilon$ & $\alpha\lambda'\varepsilon'$, quas compendii caussa sa *Quadratrices Lineæ Tensionum* & *Compressionum* dicere liceat; quarumque usum in construenda Curva Elastica in sequentibus ostendemus.

Cor. 1. Quum in omnibus Corporibus non eadem deprehendatur vis Elastica, sequitur, pro fibris diversi generis, diversas quoque fore lineas tensionum & compressionum. Quare dum has lineas cum earum Quadratricibus in seqq. adhibemus ad inveniendas inflexiones Laminæ Elasticæ, illas semper supponimus constructas pro fibra ejusdem generis, cujus sunt fibræ Laminam illam constituentes.

Cor. 2. Quoniam evanescente t (vel v) evanescunt simul p & area $\int pdt$ (vel q & $\int qdv$) adeoque etiam t' (vel v'), patet utramque Lineam & Tensionum & Compressionum, cum earum Quadratricibus per punctum α transire. Cumque sit $dt' = pdt$ & $dv' = qdv$, recta $\beta\kappa\gamma$ utramque Quadratricem tanget in eodem puncto α.

Cor. 3. Si Vires restituentes ponuntur Tensionibus (atque Compressionibus) proportionales, $\alpha\kappa\delta$ (& $\alpha\kappa'\delta'$) fiunt lineæ rectæ. Hac vero assumta hypothesi, quum fiat t' (& v') proportionalis ipsi tt (& vv), patet utramque Quadratricem fore Parabolam Conicam, cujus vertex α & axis $\alpha\zeta$ ad rectam $\beta\alpha$ perpendicularis.

§. 6.

Ut a Casu simpliciori initium fiat, Laminam inflectendam, cujus in singulis punctis Elasticitas absoluta sit eadem, primo supponimus gravitatis expertem & in situ suo naturali seu ante inflexionem in directum extensam esse & quidem figura gaudere parallelepipe-

di

di rectangularis, cujus longitudo sit a, latitudo b & crassities AA' (Fig. 3.) $= 2c$; postea visuri, quomodo in Casibus magis compositis inflexio Laminæ determinari queat. Lamina hæc fixa in AA' e situ suo rectilineo in statum quemvis violentum $AA'LB'B$ inflectatur, ita quidem ut sub ista inflexione latus ejus $A'MB'$ semper in eodem plano maneat. Alteri extremitati BB' in directione data BP applicata sit potentia P, quæ in situ hoc inflexo retinere valet Laminam, ita ut inter singulas ejus partes æquilibrium obtineat. Hoc facto, generatim patet, quod si Lamina ita inflexa figatur in aliquo puncto M vel, quod eodem recidit, si pars ejus MA rigescere ponatur, ita tamen ut in figura ejus nihil immutetur, ad reliquam partem in eodem statu MB' retinendam, eadem adhuc potentia P requiratur. Pari ratione manifestum est, quod rigescente ad alteram extremitatem portione aliqua $B'H$, manente cæteroquin figura, reliqua pars HM ope potentiæ P adhuc in eodem situ conservetur. Unde sequitur, quod si punctum H migrare concipiatur in N infinite propinquum ipsi M, vis illa, qua quodvis Laminæ Elementum $MNOL$, planis ML & NO ad curvam normalibus interceptum, situm suum naturalem recuperare conatur, in æquilibrio sit cum potentia P. Sit vero hujus elementi figura naturalis $MmlL$, (Figg. 3. 4.) quæ, facta inflexione, mutata est in $MNOL$, ita ut fibræ quæcunque exteriores DV extensæ sint ad X, interiores autem EU compressæ ad T. E puncto N ad directionem PB potentiæ P perpendicularis ducatur NQ, quæ dicatur y, & ad idem punctum curvæ tan-

gens

gens NT. Angulus NTQ dicatur ϕ & portio curvæ BNs. Productæ ML & NO sibi invicem occurrant in R, ita ut ad N fiat Radius Osculi $RN = r$. Erit igitur (per Method. Tang.) $r d\Phi = ds$ & $dy = ds \sin \phi$, posito *Sinu Toto* $= 1$. Quum jam singulæ fibræ extensæ & compressæ circa punctum S circumrotare nitantur NO instar vectis in situm ml, huic vero circumrotationi resistat potentia P; patet summam momentorum omnium fibrarum æquari momento ipsius P. Ut itaque determinentur momenta illa, fibræ cujusvis extensæ DX a puncto S distantia SV dicatur u, & ob ang. $mSN = MRN$ erit $VX = ud\Phi$, longitudo autem ipsius fibræ $DV = ds$, adeoque $VX : DV :: ud\phi : ds :: u : r$. Retentis porro iisdem denominationibus ac §. 5. (Fig. 2.) si fiat αu vel $t : f :: VX : DV :: u : r$, vires quibus semet contrahere nituntur fibræ ita extensæ DX & $\beta\mu$ erunt (§. 4.) æquales. Vis igitur fibræ DX (§. 5.) erit $= kp : f$, adeoque ejus momentum $= krpt : ff$. Si jam cujusvis fibræ crassities sit e^2, atque ipsi V infinite propinquum sumatur punctum v, per quæ duo puncta concipiantur plana ipsi ml normalia, multitudo fibrarum his planis interceptarum erit $= \frac{brdt}{eef}$, unde harum fibrarum momentum $= \frac{bkrrptdt}{eef^3}$, adeoque summa momentorum omnium fibrarum inter S & $V = \int \frac{bkrrptdt}{eef^3}$. Est autem $\int \frac{ptdt}{f} =$ areæ quadratricis $\alpha\lambda\pi$. (§. 5.) Ergo sumta $\alpha\gamma : f :: Sm : r$, erit summa momentorum omnium fibrarum extensarum $= \frac{bkrr.\alpha\varepsilon\zeta}{eeff}$. Eodem modo determinantur mo-

 menta

menta singularum fibrarum compressarum EY, quorum itaque momentorum (facta $\alpha\gamma' : f :: Sl : r$) summa erit $= \frac{bkrr.\alpha\varepsilon'\zeta'}{eeff}$. Quumque momentum ipsius P sit $= P.\, NQ = Py$, erit $e^2 f^2 Py = bkr^2\, (\alpha\varepsilon\zeta + \alpha\varepsilon'\zeta')$. Si ulterius potentia P resolvatur in binas, tangentialem unam, alteram normalem, illa in directione NT agens erit $= P\, Cos\, \varphi$. Singulæ vero fibræ compressæ, semet restituere conantes, planum illud NO in eadem directione NT urgent viribus, quarum summa reperitur $= \frac{bkr.\alpha\zeta'}{eef}$. Hoc autem planum in contrariam plagam premitur a viribus, quibus se relaxare nituntur fibræ extensæ, quarumq; virium summa $= \frac{bkr.\alpha\zeta}{eef}$. Ergo $P\, Cos\, \varphi - \frac{bkr}{eef}(\alpha\zeta - \alpha\zeta')$ erit vis, quæ urget planum NO in directione tangentis NT, singulaque sic ejus puncta, consequenter etiam ipsum S, a plano ML elongare conatur. Cum vero limes extensionum atque compressionum in S ponatur, adeoque longitudo ipsius fibræ GS invariata; patet hanc vim fore $= 0$, unde $e^2 f P\, Cos\, \varphi = bkr\, (\alpha\zeta - \alpha\zeta')$. Exinde porro quod $\alpha\gamma : f :: Sm : r$ & $\alpha\gamma' : f :: Sl : r$, sequitur esse $\gamma\gamma' = 2cf : r$. Tres vero hæ, quas sic obtinuimus æquationes, si cum iis comparentur, quæ naturam utriusque curvæ $\alpha\varepsilon$ & $\alpha\varepsilon'$ ex data quavis tensionum atque compressionum Lege (§. 5.) declarant, ope Methodi Tang. tandem pervenietur ad æquationem pro ipsa Curva Elastica, quod specialioribus exemplis in seqq. illustrabimus.

§. 7.